

# 統計力学の型式による組織行動の分析

星野靖雄

経営論集 第6号 (1977年3月) 抜刷

the 1990s, the number of people in the world who are under 15 years of age is expected to increase from 1.1 billion to 1.4 billion.

As a result of the demographic changes, the number of people in the world who are aged 15 and over is expected to increase from 4.9 billion in 1990 to 5.5 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 65 and over is expected to increase from 0.4 billion in 1990 to 0.8 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 75 and over is expected to increase from 0.1 billion in 1990 to 0.3 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 85 and over is expected to increase from 0.02 billion in 1990 to 0.08 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 95 and over is expected to increase from 0.002 billion in 1990 to 0.01 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 100 and over is expected to increase from 0.0002 billion in 1990 to 0.001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 105 and over is expected to increase from 0.00002 billion in 1990 to 0.0001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 110 and over is expected to increase from 0.000002 billion in 1990 to 0.00001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 115 and over is expected to increase from 0.0000002 billion in 1990 to 0.000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 120 and over is expected to increase from 0.00000002 billion in 1990 to 0.0000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 125 and over is expected to increase from 0.000000002 billion in 1990 to 0.00000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 130 and over is expected to increase from 0.0000000002 billion in 1990 to 0.000000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 135 and over is expected to increase from 0.00000000002 billion in 1990 to 0.0000000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 140 and over is expected to increase from 0.000000000002 billion in 1990 to 0.00000000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 145 and over is expected to increase from 0.0000000000002 billion in 1990 to 0.000000000001 billion in 2000.

The number of people in the world who are aged 150 and over is expected to increase from 0.00000000000002 billion in 1990 to 0.0000000000001 billion in 2000.

# 統計力学の型式による組織行動の分析

星 野 靖 雄

## 目 次

はじめに

- 1 組織の動学分析
  - 2 組織の非線型動学分析
  - 3 ボルテラの動学
  - 4 組織の統計力学的分析
  - 5 組織の多様度の測定
- 付録 統計力学の基本原則  
おわりに

## はじめに

統計力学の物理学以外への応用、適用は、複雑な生態システムの解析が E. H. カーナー (Kerner) [7] によって1957年になされたのが最初のパイオニアリングな成果であった。

統計力学の物理学における役割は、温度とか圧力とかいったマクロ現象を扱う変数を、分子や原子の運動を記述するミクロ的な変数で説明しようとするものである。前者はどんな型の永久機関の存在も否定する熱力学の法則の上に成立しており、後者は粒子系を扱うニュートン力学を基礎としていた。

この両者を統合しようとする重大な困難に直面する。それは、気体1グラム当量に含まれる分子数でも  $6 \times 10^{23}$  個あるという巨大な数の粒子を決定論で取り扱うことがほとんど不可能ということである。

そこで、高次元のニュートン空間に確率的要素を導入して理論をたてることが行なわれた。そして、統計力学は、初期条件が不完全にしか決定できない力学系についても有利な理論的道具になり得る性質を持っているのである。このことは、ミクロの粒子に比較し得る多数の個人や物、情報からなる組織全体のマクロ的特性を研究する上でも統計力学が有用であることを意味

している。

本稿では、第1節に、組織行動の動学分析として線型、非線型の場合の連立微分方程式によるモデル化の例をいくつかサーベイしている。

第2節では2つの組織のボルテラ型の非線型動学モデルについて述べた。

第3節は、 $n$ 個の組織行動をボルテラの動学で記述して、これを統計力学でのリュウヴィエの定理と同一の型に導いた。

第4節は、組織の活動水準、変動値の概念を統計力学的型式でモデル化すると同時に、概念を図で説明した。

第5節で、統計力学でのエントロピーの概念と同一型式の組織の多様度の概念を定義して、2つの組織例によって多様度を測定比較した。

付録として、本論文で扱っている統計力学の基本原則として、リュウヴィエの定理、エルゴード仮説、エントロピー、マックスウェル=ボルツマンの法則等について概説した。

## 1 組織の動学分析

組織行動を定量的に、時間に伴い変化する動態的な分析の対象とした研究は型的には2つの流れがある。

1つは、組織間の紛争の動学として、基本的には、変数間の線型の相互関係を仮定して微分方程式でモデル化して実証的にデータを検定しているものである。もう1つは非線型の微分方程式でモデル化しているものである。前者には、ランチェスターの法則として知られる戦闘集団間の関係を表現したものがまずあげられる。ランチェスターの法則は一次法則と二次法則よりなっており、前者は次のようである。Lanchester [10]

A, B 2軍が戦闘状態にあって、各々の兵員数を  $a$ ,  $b$  とし、戦闘が時間  $t$  とともにいくどか行なわれるとする。ここで、交換比として、喪失したA軍の戦闘員平均とB軍のそれとの比を  $E$  とする。すると、1戦闘あたりの  $a$ ,  $b$  についての微分方程式は、

$$\frac{da}{dt} = -\frac{ab}{1+E}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{abE}{1+E}$$

であり、

$$\frac{db}{da} = E, \quad b_0 - b = E(a_0 - a)$$

となる。但し、 $a_0$ 、 $b_0$  は  $t=0$  での  $a$ 、 $b$  の値である。

このような、 $a$ 、 $b$  の関係をランチェスターの一次法則という。

二次法則は、戦闘が個人というより集団対集団の戦いであり、戦闘の激しさをあらわす尺度として  $F(t)$  を用いると、

$$\frac{da}{dt} = -\frac{b}{1+E} F(t), \quad \frac{db}{dt} = \frac{aE}{1+E} F(t)$$

であり

$$\frac{da}{db} = \frac{b}{aE} \quad \therefore b_0^2 - b^2 = E(a_0^2 - a^2)$$

である。このように、戦闘者数の2乗の関係で表現されるため、これをランチェスターの二次法則という。

更に、線型の微分方程式で表現されているものに、リチャードソン・モデルがある。[15]

2つの敵対している国家の各々の軍事支出を  $x$ 、 $y$  とすれば、 $x$ 、 $y$  は次のように示される。

$$\frac{dx}{dt} = g - \alpha x + ky, \quad \frac{dy}{dt} = h + lx - \beta y$$

ここで、 $g$ 、 $h$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $k$ 、 $l$  は定数である。すると  $\frac{dx}{dt} = 0$ 、 $\frac{dy}{dt} = 0$

として、両直線の交点を求めると、 $(x_0, y_0) = \left( \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl} \right)$

但し、 $\alpha\beta - kl \neq 0$

と表現される。点  $(x_0, y_0)$  を均衡点という。座標軸を変換して、定数項をとり除く。 $X = x - x_0$ 、 $Y = y - y_0$  とする。 $g$  と  $h$  は消去でき、

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha X + kY, \quad \frac{dY}{dt} = lX - \beta Y$$

すると上式の解は

$$X = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad Y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる。

線型微分方程式でモデル化される第3の例はボエボドスキー (Voevodsky) のモデルである。[22]

このモデルでは、3つの変数、戦死者数  $D$ 、戦災数  $C$ 、戦力  $S$  の関係を以下のように示している。3変数はすべて時間  $t$  の関数であるとする。

$$D = \gamma D^{\beta}$$

$$S = \alpha C^{\delta} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ は定数}$$

又、敵対する A, B 両軍の戦死者数を各々  $X, Y$  とすると、

$$Y = jX^k \quad j, k \text{ は定数}$$

であるとしている。これらの式は両辺の対数をとって時間  $t$  で微分すれば、すべて線型の微分方程式で表現されることは自明であり、戦災数、戦力についても同様の定式化ができる。

以上のような線型の微分方程式での定式化に対し、次に非線型微分方程式でのモデル化を考察してみる。

M. ヘアー (Haire) [3] は次のように定式化している。企業組織の成長を従業員数で示すと、その様子は指数関数で表現でき、 $R$  を成長率、 $N$  を従業員数とすると、

$$\frac{dN}{dt} = N \log_e R$$

としている。しかしながら、この式によると成長が無限となってしまうため、現実の環境からの圧力によって成長が停滞することが説明できない。そこで上式の成長率は次のようなロジスティック曲線へと修正される。

$$\frac{dN}{dt} = \left( \frac{K-N}{N} \right) N \log_e R$$

ここで、 $K$  は外的環境の制約によって定まる従業員数  $N$  の上限である。

更に、彼は、生命組織を説明するために、2乗-3乗法則 (Square-Cube law) を提唱している。この法則は、物理的実体の表面積と体積との間の不変な関係を示すものであり、そのことが企業の組織にもあてはまるとしている。主として企業の外部の仕事に関係している人々の数  $X$  を表面積に対応し、企業の内部の仕事に関する従業員数  $Y$  を体積に対応して考える。

$$\sqrt[3]{Y} = a + b\sqrt{X} \quad a, b \text{ は定数}$$

と表現される。

次に、ボルテラ=ロトカ型の非線型動学モデルを考察する。

## 2 組織の非線型動学分析

2つの組織が存在していて、一方の組織が他方の組織に取り込まれるか、捕食されるという関係があるとする。前者の組織のメンバーの数を  $N_1$  と

し、後者を  $N_2$  とする。両組織は、ある関係をもっていることにより存続している。単独で存在している場合は、 $N_1$  は独立に正の成長率  $\alpha$  をもっているが、 $N_2$  はこれに反して、独立では存続できないと考えられる。いわゆる、寄生-宿主の関係があつてはじめて存続するといえる。このとき、2つの組織のメンバー数の時間的変化は、次のような連立非線型微分方程式で示される。

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) N_1 \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N_1) N_2 \quad (2)$$

ここで、 $\alpha_1$  は組織  $N_1$  の単独での成長率であり、これに、寄生組織のメンバー数  $N_2$  に比例する接触回数によって負の影響  $\beta_1 N_2$  を受ける。又、組織  $N_2$  の単独の成長率は、単独では存続しないということから負であり、これは、宿主組織のメンバー数  $N_1$  に比例して成長率への正の影響  $\beta_2 N_1$  を被るとする。

(1), (2) を変形する。

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 N_2)$$

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N_1)$$

さらに、

$$\frac{d}{dt} \log N_1 = (\alpha_1 - \beta_1 N_2) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \log N_2 = (-\alpha_2 + \beta_2 N_1) \quad (4)$$

ここで、(3)の左辺×(4)の右辺-(3)の右辺×(4)の左辺は

$$(-\alpha_2 + \beta_2 N_1) \frac{d}{dt} \log N_1 - (\alpha_1 - \beta_1 N_2) \frac{d}{dt} \log N_2 = 0$$

となる。

したがって、

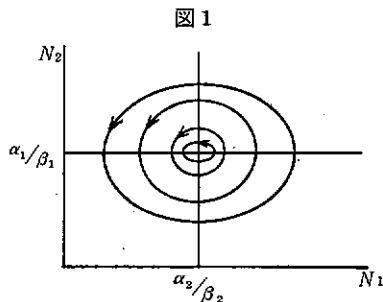
$$\frac{d}{dt} [-\alpha_2 \log N_1 + \beta_2 N_1 - \alpha_1 \log N_2 + \beta_1 N_2] = 0$$

これを積分して、一定値を  $G$  とおく。

$$\alpha_2 \log N_1 - \beta_2 N_1 + \alpha_1 \log N_2 - \beta_1 N_2 = G \quad (5)$$

両組織のメンバー数  $N_1, N_2$  は、(5)の関係において不変であることがわかる。

このことは図1のように、 $N_1, N_2$  が曲線にそって変化していることからわかる。図で  $\alpha_1 - \beta_1 N_2 = 0, -\alpha_2 + \beta_2 N_1 = 0$  なる点の座標  $(N_1, N_2) = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$  が均衡点であるが、軌跡は均衡点の周囲の楕円軌道をとっている。



### 3. ボルテラの動学

$n$  個の相互作用をしている組織又は生物集団の行動特性は、V. ボルテラ (Volterra) によって、組織のメンバー数を  $N_1, N_2, \dots, N_n, \dots, N_s$  とすると次のように表現されている。

$$\frac{dN_i}{dt} = \varepsilon_i N_i + \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_i N_j \quad (6)$$

ここで右辺の第1項は、1つの組織が単独でおかれたときの成長率であり、宿主となるような組織ではこの値が正であり、寄生組織では負の値をとり、これ自身では指数成長をする。第2項は、ある組織  $N_i$  と他のすべての組織  $N_j$  との相互作用を意味しており、これは、 $N_i$  と  $N_j$  との積が接触回数であり、これに比例して影響を受けると考えられる。

そして、係数  $\alpha_{ij}$  は組織  $i$  が他の組織  $j$  から受ける影響であるため、 $\alpha_{ji}$  は反作用として逆の符号を持つ。すなわち  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$  となる。

方程式(6)の定常状態は、 $\frac{dN_i}{dt} = 0$  とおき、定常解は  $(N_1^*, N_2^*, \dots, N_s^*)$  とすると、

$$\varepsilon_i + \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j^* = 0 \quad (7)$$

である。ここで、新しい変数  $v_i = \log \frac{N_i}{N_i^*}$  ( $i=1, 2, \dots, s$ )、 $v_j = \log \frac{N_j}{N_j^*}$  ( $j=1, 2, \dots, s$ ) を導入する。 $v_i$  は  $-\infty < v_i < \infty$  であり、 $v_i$  の時間による



微分は

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{N_i^*}{N_i} \frac{1}{N_i^*} \frac{d}{dt} N_i$$

(6)より

$$\frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dt} = \varepsilon_i + \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j$$

であるので

$$\frac{dv_i}{dt} = \varepsilon_i + \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j$$

となる。この式に、(7)式を変形して代入すると

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j - \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j^*$$

ここで、変数の定義より  $N_j = N_j^* e^{v_j}$  であるので、これを代入して整理する。

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} e^{v_j} N_j^* - \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j^* = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j^* (e^{v_j} - 1) \quad (8)$$

ここで、 $N_i^*(e^{v_i} - 1)$  を両辺にかけ、 $i$  について和を求める。

$$\sum_{i=1}^s N_i^*(e^{v_i} - 1) \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^s \alpha_{ij} N_i^* N_j^* (e^{v_i} - 1)(e^{v_j} - 1) \quad (9)$$

ここで  $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$  であることにより、(9)式が  $i, j$  について対称であるので、(9)=0 となる。

$$\sum_{i=1}^s N_i^*(e^{v_i} - 1) \frac{dv_i}{dt} = 0$$

この積分は一定値  $G$  をとるとすると、

$$\sum_{i=1}^s N_i^*(e^{v_i} - v_i) = G \quad (10)$$

となる。

よって(8)式は、

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} N_j^* (e^{v_j} - 1) = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \frac{\partial G}{\partial v_j} \quad (11)$$

ここで  $v_i (i=1, \dots, s)$  で成立する  $S$  次元空間を考えると、 $S$  種の組織のメンバー数が、 $S$  次元空間の 1 点として表現される。この組織のメンバー数の推移は(11)式である。

1点  $(v_1, v_2, \dots, v_s)$  における密度を  $\rho(v_1, v_2, \dots, v_s)$  とし、そこにおける軌道の速度を  $\dot{v} = (\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots, \dot{v}_s)$  とし、(1)式の解の一意性、連続性を仮定すると、流れの連続の方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = 0 \quad (12)$$

$v$  と  $\dot{v}_i$  の関係より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial(\rho \dot{v}_i)}{\partial v_i} = 0$$

偏微分をして、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \dot{v}_i \frac{\partial \rho}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^s \rho \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} = 0 \quad (13)$$

ここで、(1)より

$$\sum_{i=1}^s \rho \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{d v_i}{dt} \right) = \sum_{i,j=1}^s \rho \alpha_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial v_i \partial v_j} = 0$$

右辺は係数が  $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$  であり、 $i, j$  について対称であるため 0 となる。

結局、(13)式の第3項は 0 になるので

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \dot{v}_i \frac{\partial \rho}{\partial v_i} = 0 \quad (14)$$

そして(14)式は、古典力学における密度の保存の定理であるリュウヴィエ (Liouville) の定理のことであり、次節で説明する。

一定値  $G$  の中に、運動によって不変に保たれるような部分領域が存在しない場合にはエルゴード仮説が成立し、次のような式が得られる。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(v_i(t)) dt = \frac{1}{\Omega_c} \int_{G=C} f(v_i) \mu d\rho \quad (15)$$

ここで  $d\rho$  は  $G=C$  の超曲面の面積要素であり、 $\mu(dt)$  はそのマイクロカノニカルな測度で、 $\mu(dt) = d\rho / \sqrt{\sum_i (\partial G / \partial v_i)^2}$  である。又、 $\Omega_c$  は位相殻  $G=C$  の領域である。

エルゴード仮説については、付録を参照されたい。

## 4 組織の統計力学的分析

前節の(10)式で  $G$  が一定で保存されることは導いた。そこで次に、カーナーの方法に従って組織行動の統計力学の型式による分析を行なう。

カーナーは、すべての  $n$  個の組織に対して

$$\theta = \frac{1}{N_i^*} \overline{(N_i - N_i^*)^2} \quad (10)$$

を定義し、 $\theta$  をそのシステムの「温度」と呼んだ。 $\theta$  は、 $N_i$  の組織とその均衡値  $N_i^*$  からの偏差の2乗の平均値である。そして、この「温度」の値の大きさが、組織の定常状態からの励起の水準を示していると考えられる。そこで組織行動の分析に対して、我々はこの概念を組織の活動の活発さの水準を表現していることから、組織の活動水準と呼び、同じ  $\theta$  で表現する。

$i$  番目の組織  $N_i$  が  $n_i$  と  $n_i + dn_i$  の間にとる確率  $P$  は  $n_i = N_i/N_i^*$  とすると、

$$P(n_i) dn_i = K n_i^{x_i-1} \exp(-x_i n_i) dn_i \quad (11)$$

ここで  $x_i = N_i^*/\theta$  であり、 $K$  は定数になる。

この式は統計力学のマックスウェル=ボルツマンの法則 (Maxwell-Boltzmann law) に類似している方程式となる。

個々の組織が組織全体の均衡値からの変動の大きさを決める値として、次の変動値を定義する。

$$x_i = (N_i - N_i^*)/N_i^* \quad (12)$$

ここで  $x_i$  は均衡値からの正規化された変動値である。 $x_i$  の平均値は 0 となる。 $x_i$  が、均衡値からのばらつきの特定値 ( $D$ ) が与えられた時に、どれくらいの頻度で起こるかを次に調べる。 $\theta$  が一定とすれば、ばらつきの値が大きければ大きい程、その頻度は少なくなる。

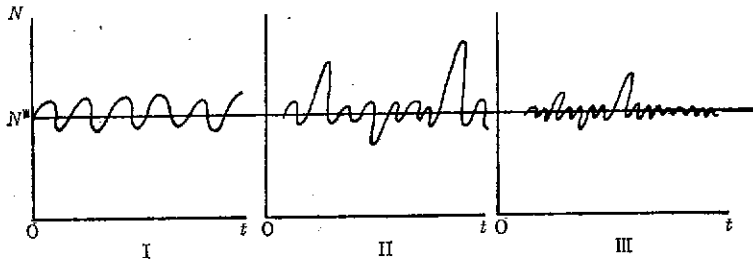
ライ (E. Leigh) [11] はその頻度を次式のように導いている。

$$\frac{1}{H} \exp\left(-\frac{N_i^* D^2}{2\theta}\right) \sqrt{\sum \alpha_{ij}^2 N_i^* N_j^*} \quad (13)$$

時間の経過とともに組織のメンバー数が推移していく状態を記述すると、それには図2のようにいくつか考えられる。

図2のIは、組織のメンバー数は非常に多いが、それらの相互作用は相対的には強くなって、均衡値の周囲のばらつきが、正負の両方向に同じような割合で起こり、又、ばらつきの値もほぼ同じである。これは、最も単調な景

図 2



気循環の波にも比較できる。

IIは、極めて不規則な振動を繰り返し、その振幅の大きさも一定ではなく、突然の急激な成長や衰退を伴う。組織のメンバー数は少ないけれども、相互作用が非常に強い場合に起こり、組織の活動水準 $\theta$ は高いと考えられる。通常の景気循環に比較できる。

IIIは、IIと比較すると、活動水準が小さい場合であるが、波形の様子はIIと同様に、不規則な変動を伴っている。Smith[19]

### 5 組織の多様度の測定

組織はそのメンバーが、数少ないものから数えきれないくらい多くのメンバーを持っているものまで存在する。又、経営組織をとれば、単に企業内の従業員数だけでなく、経営組織を構成する個人と全体組織の中間形態としての種類の部、課、係、あるいは製品別、地域別の組織等のように種々の形態をとっている。

こういったことは生態系でも同種であり、存在しているあらゆる種の個体数や、より低い段階での種の個体数、あるいはその種の存在している地域等によって分類できる。

この組織の多様性を示す尺度として、我々は次のような、多様度 $D$ を定義する。

$$D \equiv \sum_i D_i = - \sum_i P_i \log_2 P_i$$

ここで、 $P_i$ は、組織の全体のメンバー数を $N$ として、中間組織のメンバー数を $N_i$ としたとき  $P_i = N_i/N$  で定義されるとする。

ここで負の符号がつけられているのは、結果を正の値にするためである。

この多様度は、統計力学におけるエントロピー、情報理論による情報エントロピーと同じ測度であり、不確実さの程度を表現するといえる。<sup>4)</sup>  $D$ が大きくなるということは、もし組織内の1個人を取り上げた場合、その個人が組織のどの部門に属するかが、より不確実になると考えられる。もし、1部門に1人しか所属しないのなら、その場合の不確実性は0になる。というのは  $\log 1=0$  であるからである。もし、与えられた  $i$  部門において、 $j$  個の課が存在し、 $j$  個の課に属する従業員数が皆同一ならば、ばらばらに拡散している場合と比較して、 $D_i$  は不確実性が最大になる。

多様度の測定はいくつかの利点がある。

第1に、組織がどんどん拡大して、部門数や従業員数が増加していても、多様度に上限があるわけではないので、どんな複雑で大規模な組織も測定できる。

第2に、従業員の多様度を測定するのは、部門や課の数以外の分類、たとえば年齢や学歴、勤続年数といった尺度でも可能であり、この新しい尺度の多様度を、部門の数による多様度そのまま加えて比較できるのである。それによって、単一数値の上で幾つかの組織の多様度が、幾つかの測定尺度にもかかわらず比較できるという利点がある。

次に、具体的な組織について多様度を測定してみる。

【例1】 2つの総合大学の学部組織の多様度

A, B 2つの大学は各々10学部より構成されており、この両者の多様度を計算すると表1のようになる。<sup>5)</sup>

A大学の多様度は0.87400であり、B大学は0.87465であるので、A大学の方がB大学よりも多様度は低いといえる。教員数はA大学1,311名で、B大学970名であるので、A大学の方が1.35倍以上の規模であるにもかかわらず多様度は少ないことになる。

もし、10学部の学部規模が同一であれば  $P_i=0.1$  となり、 $P_i \log P_i = -0.1$  であり、 $-\sum_{i=1}^{10} P_i \log P_i = 1$  となるので、両方共、多様度は1であり、全教員数の差は意味がない。

【例2】 2つの総合商社の本・支店組織の多様度

表 1 2 総合大学の学部組織の多様度

A大学 学部別 教員数	$P_i$	$\log P_i$	$P_i \log P_i$	B大学 学部別 教員数	$P_i$	$\log P_i$	$P_i \log P_i$
289	0.22044	-0.65671	-0.14477	177	0.18247	-0.73881	-0.13481
91	0.06941	-1.15858	-0.08042	55	0.05670	-1.24642	-0.07672
25	0.01906	-1.71988	-0.03278	26	0.02680	-1.57187	-0.04213
54	0.04118	-1.38531	-0.05705	24	0.02474	-1.60660	-0.03975
42	0.03203	-1.49444	-0.04787	24	0.02474	-1.60660	-0.03975
143	0.10907	-0.96229	-0.10496	128	0.13195	-0.87959	-0.11606
233	0.17772	-0.75026	-0.13334	91	0.09381	-1.02775	-0.09641
26	0.01983	-1.70268	-0.03376	50	0.05154	-1.28786	-0.06638
290	0.22120	-0.65521	-0.14493	287	0.29587	-0.52890	-0.15649
118	0.09000	-1.04576	-0.09412	108	0.11134	-0.95335	-0.10615
1,311	合 計		-0.87400	970	合 計		-0.87465
多様度 $D=0.87400$				多様度 $D=0.87465$			

表 2 は、2つの我国の代表的な総合商社の本支店の多様度の測定例である。

従業員数はA商社の方が9,218名とB商社の9,455名に比較して少ないが、本店だけをみると、A社5,822名、B社5,769名であり逆転している。しかしながら、本店だけの多様度は、A社0.12604であり、B社0.13091であるのでB社の方が高い。全体の多様度はA社が0.60331でありB社が0.62568であるので、やはり、B社の多様度の方が高く、大学の例とは逆に、組織のメンバーの多い方が高い多様度を保持している。

表 2 2 総合商社の本・支店組織の多様度

A商社 本・支 店別従 業員数	$P_i$	$\log P_i$	$P_i \log P_i$	B商社 本・支 店別従 業員数	$P_i$	$\log P_i$	$P_i \log P_i$
5,822	0.63159	-0.19956	-0.12604	5,769	0.61015	-0.21456	-0.13091
1,639	0.17780	-0.75007	-0.13336	175	0.01850	-1.73283	-0.03206
578	0.06270	-1.20273	-0.07541	16	0.00169	-2.77211	-0.00277
110	0.01193	-1.92336	-0.02295	119	0.01258	-1.90032	-0.02391
77	0.00835	-2.07831	-0.01735	84	0.00888	-2.05159	-0.01822
22	0.00238	-2.62893	-0.00626	43	0.00454	-2.34294	-0.01064
50	0.00542	-2.26600	-0.01228	35	0.00370	-2.43080	-0.00899
58	0.00629	-2.20135	-0.01385	27	0.00285	-2.54516	-0.00725
56	0.00607	-2.21681	-0.01346	83	0.00877	-2.05700	-0.01804

23	0.00249	-2.60380	-0.00648	564	0.05965	-1.22439	-0.07303
50	0.00542	-2.26600	-0.01228	59	0.00624	-2.20482	-0.01376
105	0.01139	-1.94348	-0.02214	14	0.00148	-2.82974	-0.00419
35	0.00379	-2.42136	-0.00918	5	0.00052	-3.28400	-0.00171
57	0.00618	-2.20901	-0.01365	1,714	0.18127	-0.74167	-0.13444
67	0.00726	-2.13906	-0.01553	60	0.00634	-2.19791	-0.01393
20	0.00216	-2.66555	-0.00576	21	0.00222	-2.65365	-0.00589
151	0.01638	-1.78569	-0.02925	69	0.00729	-2.13727	-0.01558
18	0.00195	-2.70997	-0.00528	79	0.00835	-2.07831	-0.01735
45	0.00488	-2.31158	-0.01128	136	0.01438	-1.84224	-0.02649
142	0.01540	-1.81248	-0.02791	12	0.00126	-2.89963	-0.00365
66	0.00715	-2.14569	-0.01534	247	0.02612	-1.58303	-0.04134
12	0.00130	-2.88606	-0.00375	7	0.00074	-3.13077	-0.00232
15	0.00162	-2.79048	-0.00452	58	0.00613	-2.21254	-0.01356
9,218	合 計		-0.60331	20	0.00211	-2.67572	-0.00565
多様度 $D=0.60331$				16	0.00169	-2.77211	-0.00468
				23	0.00243	-2.61439	-0.00635
				9,455	合 計		-0.62568
				多様度 $D=0.62568$			

付録 統計力学の基本原理解

(1) リューヴィエ (Liouville) の定理

古典力学で運動を一般的に取り扱う際には、自由度  $s$  の力学系に対して、 $s$  個の一般化された座標  $q_1, q_2, \dots, q_s$  と、各々に共役な  $s$  個の運動量  $p_1, p_2, \dots, p_s$  とからなる空間において運動を記述し、この空間を位相空間という。

組織の微視的状態は位相空間内の点によって表現されるが、この点を代表点といい、この代表点によって、ある瞬間における組織の状態が表現されると考えられる。組織に属するメンバーの数が多くなった場合、位相空間内の代表点の密度を考えると、時間の経過によって代表点の集合は流体のように位相空間内を移動し、この流れについて代表点の密度は時間がたっても変化しない。これが、リューヴィエの定理 (Liouville's Theorem) であり、代表点の集合は圧縮されない流体のように運動する。

位相空間内に微小体積  $\Delta q_1 \Delta q_2 \dots \Delta q_s \cdot \Delta p_1 \Delta p_2 \dots \Delta p_s$  と代表点の密度  $\rho(q, p, t)$  を考えることによって、リューヴィエの方程式は次のように導か

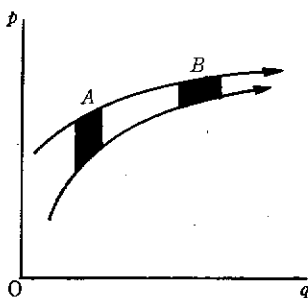
れる。

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left( \dot{q}_j \frac{\partial f}{\partial q_j} + \dot{p}_j \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) = 0$$

リュウヴィエの定理に関して重要な概念は、発散ということである。発散は流体が流れによってある点に蓄積あるいは、その点から流出する正味の速度で測定するものである。この発散が、リュウヴィエの定理に関しては零であり、流体はどの点においても蓄積しなくて、流れは非圧縮性であるといえる。このことは、流れの過程において、初期の体積が変化せず一定に保存されるということである。

図3のように、2次元座標で考えると、流れが形成する単位時間内のAとBの面積は、時刻にかかわらず一定で等しいのである。

図3



(2) エルゴード仮説 (定理)

次のような力学系における状態空間の1点を  $A(v_1, v_2, \dots, v_s)$  と表現する。

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i(v_1, v_2, \dots, v_s) \quad (v=1, 2, \dots, s)$$

点Aはこの点を通る軌道を満たす系の力学方程式の解

$$C(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_s(t)\}$$

を決定する。更に  $F$  を、系の状態が決まれば一義的に決定される特定の観測量とする。そして、観測量  $F$  の時間平均値を求める。

有限時間  $0 \leq t \leq T$  の中に有限個の時点  $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_s = T$  を選んで、各々の時点における  $C(t)$  上の  $F$  値を計算する。すると平均値は

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^s F(v_1(t_i), \dots, v_s(t_i))$$

となる。ここで、分割をより多くし、 $T$  をより大きな値にしておくと、全軌道  $C(t)$  上での  $F$  の極限での平均値に近づく。すると、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(v_1(t), \dots, v_s(t)) dt \quad (2)$$

となる。 $C(t)$  が有界であれば、この極限が有限の実数値として求められる。



(2)式を  $C(t)$  上での観測量  $F$  の時間平均という。

変数  $v_1, v_2, \dots, v_s$  で形成されている  $S$  次元の空間を  $V$  空間という。 $V$  空間の中のある有限の体積をもった部分集合  $G$  で、 $F$  の平均値を考える。 $G$  を多次元直方体で近似できると考え、この上で  $F$  を平均すると、 $G$  上での  $F$  の平均値は次のように得られる。

$C$  を  $S$  次元直方体として  $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) で定義されるとする。 $x_1$  について  $F$  の値を平均すると

$$\frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \int F(v_1, v_2, \dots, v_s) dx_1$$

となる。

この値は状態変数  $v_2, \dots, v_s$  にもみ依存する観測量となっており、次元数が1減って  $(s-1)$  次元になっている。同様の手続を行なうと  $F$  の平均値は

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^s (\beta_i - \alpha_i)} \int \dots \int F(v_1, v_2, \dots, v_s) dv_1 \dots dv_s$$

これを書き直して、

$$\frac{1}{\Omega(C)} \int_C F(v_1, v_2, \dots, v_s) dv_1 \dots dv_s$$

ここで  $\Omega(C)$  は多次元直方体の体積である。

もとの有界な領域  $G$  は、いくつかの多次元直方体から成りたっているとすると、領域  $G$  中での  $F$  の平均値は

$$\frac{1}{\Omega(G)} \int_G F(v_1, v_2, \dots, v_s) dv_1 \dots dv_s$$

となり、 $G$  上での  $F$  の位相平均という。

時間平均と位相平均について、両者が等しいとするような  $C(t)$  と  $V$  を選択できることが、エルゴード仮説であり

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(v_1, \dots, v_s) dt = \frac{1}{\Omega(G)} \int_G F(v_1, \dots, v_s) dv_1, \dots, dv_s$$

と表現され、こういう性質を持つ系をエルゴード系という。

(3) ボルツマンの  $H$  定理及びマックスウェル=ボルツマンの法則

これらは、現象の可逆性や不可逆性を論ずる場合に重要である。

粒子系があって、粒子は互いに衝突するとして、粒子の速度成分が座標  $v_x$  と  $v_x+dv_x$ ,  $v_y$  と  $v_y+dv_y$ ,  $v_z$  と  $v_z+dv_z$  の間にある個数を  $f(v_x, v_y, v_z, t)dv_x dv_y dv_z$  とおく。この量の時間的変化を直接に求める代わりに、

$$H = \iiint f \log f dv_x dv_y dv_z$$

という  $H$  の時間的変化を調べると、

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

であることが証明される。

すなわち、 $H$  は増加することがなくて、時間と共に減少していき、 $\frac{dH}{dt} = 0$  の平衡状態に到達する。これをボルツマンの  $H$  定理という。

マックスウェル=ボルツマンの法則は

$$\bar{N}_i = A \exp(-u/kT) \text{ である。}$$

ここで  $u$  なるエネルギーをもっている粒子数の平均が  $\bar{N}_i$  であり、 $T$  は粒子系の絶対温度、 $A$  は粒子数一定という条件で決まるパラメーターである。 $k$  はボルツマン定数で

$$k = 1.3803 \times 10^{-16} \text{ erg deg}^{-1}$$

であり、分子1個当たりの気体定数にあたり、統計力学では、熱運動の激しさを表現する量として意味がある。

#### (4) エントロピー

気体を閉じ込めた容器に穴をあけて放置しておく、気体は外に漏れて広がっていく。そして、一様に広がって平衡状態に達する。このような気体の拡散という不可逆過程が生じている場合、拡散前の状態を  $A$ 、拡散後の状態を  $B$  とする。 $B$  になってしまった後に  $A$  である確率  $P_A(B)$  を考えるとそれは非常に小さい確率であり、 $P_A(B) \ll 1$  とおける。 $A$  から  $B$  へ移動したため  $A$  が失った確からしさを測る量がエントロピーである。エントロピーの増大は、 $A$ 、 $B$  各々の状態のエントロピーを  $E_A$ 、 $E_B$  とおいて、

$$E_B - E_A = -k \log P_A(B)$$

と表現する。ここで  $k$  はボルツマン定数である。統計力学では、「すべてのミクロ状態の起こる確率が等しい」という仮定をたてて、1つのマクロ状態に対応するミクロ状態の数又は前述のような確率を考えてエントロピーを定

義する。マイクロ状態の数を  $w$  とすれば、エントロピーは  $E = k \log w$  である。

### おわりに

統計力学は、高次の水準の現象を低次の水準の概念で説明することをめざしている。この場合1つの問題は、基礎となるマイクロの状態の明確な定式化と同時に、マクロ状態の理解が進んでいなければならないことである。その意味では、組織論の分野に統計力学の思考法を導入するときに問題が発生する。すなわち、組織論における個人というマイクロ・レベルの問題と、その集合としての組織行動というマクロ・レベル現象の記述が、必ずしも十分されていないということである。今後の方向は、その意味で、個人と全体としての組織そのものの定式化を進めなくてはならないのである。

第2の問題は、統計力学、熱力学で考えられている平衡状態の概念を、組織に適用した場合の意味についてである。組織の平衡という言葉が持つ意味は、組織の活動の全く静止した、いわば死滅した状態とは異なっていることである。ある有限時間内に、組織が一定の均衡した状態に到達することは、たとえば、企業組織のような、絶えざる成長を目的とするものに対して、十分な合理性を持ち得るかどうかである。

非平衡状態を説明するような理論モデルの必要性が重要なことは明らかであるが、この点についても、今後の研究が必要とされる。

### 注

- 1) リウヴィルの定理とも表現する。
- 2)  $\text{div } A$  は  $A$  の発散のことで、 $\text{div}$  は divergence の略であり、以下のように定義される。

$$\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 3)  $\frac{De}{Dt}$  の  $D$  は微分演算子 (differential operator) 又は演算子であり、 $D = \frac{d}{dx}$ 、 $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ 、……、 $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$  とする。
- 4) 生起する確率が  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  である可能な事象の集合があり、この事象の結果の選択、あるいは結果の不確かさを測る測度を求める。この測度を  $H(P_1, P_2, \dots, P_n)$  として、3つの仮定をたてる。
  - (1) 連続性:  $H$  は  $P_i$  に関して連続である。
  - (2) 極大値: すべての  $P_i$  が等しく  $P_i = \frac{1}{n}$  とすると、 $H$  は  $n$  の単調増加関数であり、さ

らに多くの事象があると、より多くの不確実性が存在する。

- (3) 加法性：ある選択が2つの連続する選択に分かれるなら、最初の $H$ は $H$ の個々の値の重み付きの和である。

以上の仮定を満足する $H$ は

$$H = -k \sum_{i=1}^n P_i \log P_i \quad (k \text{ は正の数})$$

ここで通常  $k=1$  として、 $H$ を情報理論でエントロピー又は平均情報量という。これは統計熱力学でのエントロピーと同じ型の方程式で表わされている。

- 5) 両大学共、いくつかの研究所、研究施設、付属の各種学校を併置しているが、ここでは、計算の都合上及び、それらの機関に教員の併任があるため、学部のみを考察した。  
6) 両社共、出張所、営業所は除外した。

### 参考文献

- [1] Cowan, J. D., The Problem of Organismic Reliability, in N. Wiener, J. D. Schadé, ed., *Cybernetics of the nervous system*, Elsevier, 1965.  
[2] 大学職員録刊行会編, 全国大学職員録, 昭和51年版, 廣潤社, 昭和51年。  
[3] Haire, M., *Modern Organization Theory*, John Wiley & Sons, 1965.  
[4] 星野靖雄, 組織の生態学的モデルについて—非線型動学モデルの諸類型と安定性—, 組織科学, Vol. 8 No. 4, 昭和49年。  
[5] 星野靖雄, 組織行動の最適制御, 経営研究所研究報告, No.1, 東洋大学経営研究所, 1976。  
[6] 星野靖雄, 企業行動と組織動学, 白桃書房, 1977。  
[7] Kerner, E. H., A Statistical Mechanics of Interacting Biological Species, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 19, 1957.  
[8] Kerner, E. H., Further Considerations on the Statistical Mechanics of Biological Associations, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 21, 1959.  
[9] Kerner, E. H., On the Volterra-Lotka Principle, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 23, 1961.  
[10] Lanchester, F. W., *Aircraft in Warfare*, Constable, 1916.  
[11] Leigh, E. C., Jr., The Ecological Role of Volterra's Equations, J. D. Cowan, *Mathematical Questions in Biology I*, American Mathematical Society, 1970.  
[12] Litterer, J. A., *Organizations, Volume II*, Second Ed., John Wiley & Sons, 1969.  
[13] Margalef, R., *Perspectives in Ecological Theory*, Univ. of Chicago, 1968, 森・今福・山村訳, 将来の生態学説：サイバネティック的生態学, 精興社, 1972。  
[14] 大沢文夫・寺本英編, 生命の物理, 岩波書店, 1972。

- [15] Richardson, L. F., *Arms and Insecurity*, Boxwood, 1960.
- [16] Rosen, Robert, *Dynamical System Theory in Biology*, Vol. 1, Stability Theory and its Applications, 山口・重定・中島訳, 生物学におけるダイナミカル・システムの理論, 産業図書, 昭和50年。
- [17] Samuelson, P. A., *Maximum Principles in Analytical Economics*, Nobel Memorial Lecture, Dec. 11, 1970.
- [18] Shannon, C. E. and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, Univ. of Illinois, 1967, 長谷川・井上訳, コミュニケーションの数学的理論, 明治図書, 1969.
- [19] Smith, J. M., *Models in Ecology*, Cambridge Univ. Press, 1975.
- [20] Starbuck, W. H., Organizational Growth and Development, in J. G. March, ed., *Handbook of Organizations*, Rand McNally, 1965.
- [21] 戸田盛和, 久保亮五編, 統計物理学, 岩波書店, 1972。
- [22] Voevodsky, J., Modeling the Dynamics of Warfare, in D. E. Knight, H. W. Curtis and L. J. Fogel, *Cybernetics, Simulation, and Conflict Resolution*, Spartan, 1971.